

文章编号 1004-924X(2009)09-2153-06

月球探测器软着陆的最优控制

单永正¹, 段广仁¹, 吕世良²

(1. 哈尔滨工业大学 控制理论与制导技术研究中心, 黑龙江 哈尔滨 150001;

2. 中国科学院 长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130033)

摘要:为了减少有限推力作用下月球探测器软着陆所需的燃料消耗,提出了应用非线性规划方法来求解该最优控制问题。首先,从庞德里亚金极大值原理出发,将有限推力作用下月球软着陆问题转化为数学上的两点边值问题;在考虑边界条件及横截条件的前提下,将该两点边值问题转化为针对共轭变量初值和末时刻的优化问题;然后应用非线性规划方法求解所形成的参数优化问题。为了降低共轭变量初值选取的敏感性,引入共轭变量与控制变量之间的变换,用控制变量初值代替了共轭变量初值。实验仿真结果显示,本文方法能够成功实现月面软着陆,并且比传统的打靶法减少了2.1%的燃料消耗,表明本文提出的设计方法简单、有效。

关键词:飞行器控制;导航技术;月球软着陆;非线性规划

中图分类号:V476.4;V249 **文献标识码:**A

Optimal control for soft landing of lunar probe

SHAN Yong-zheng¹, DUAN Guang-ren¹, LÜ Shi-liang²

(1. *Center for Control Theory and Guidance Technology,*

*Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China;*2. *Changchun Institute of Optics,*

Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China)

Abstract: In order to decrease the fuel consumption under a finite thrust, a method applying nonlinear programming is presented to solve the optimal control problem on the soft landing of a lunar probe. Based on Pontryagin maximum principle, the lunar soft landing problem is transformed into a two-point boundary value problem in mathematics. In consideration of the bound condition and transversality condition, the resulted two-point boundary value problem is converted into a parameter optimization problem aiming at the initial values of conjugate variables and the terminal time, then it is solved by the nonlinear programming. To reduce the sensitivity of conjugate initial values, the initial values of control variables are used to replace the initial values of conjugate variables based on the transformation between conjugation variables and control variables. The simulated result demonstrates that the proposed method leads to a successful implementation of the lunar soft landing and reduces by 2.1% fuel consumption as compared with that of the traditional method, which shows that the proposed design scheme is simple and effective.

Key words: aircraft control; navigation technology; lunar soft landing; nonlinear programming

收稿日期:2008-08-11;修订日期:2008-11-04.

基金项目:国家自然科学基金重点资助项目(No. 60535010);教育部博士点基金资助项目(No. 20060213037);长江学者创新团队发展计划资助项目

1 引言

上世纪 90 年代以来,世界上很多国家都制订了相应的月球探测计划,而我国的探月计划,即著名的嫦娥工程也已经实施,这些标志着月球探测的一个新时代已经开始。月球探测是一个庞大的工程,包含了诸多的关键技术,其中,月球探测器软着陆是一项极其关键的技术。

月面软着陆要求探月器以很小的相对速度着陆在月球上。由于月球上没有空气,探月器必须用机上的发动机来制动。所设计的探月器从月球停泊轨道出发,经霍曼变轨到达近月点时开始制动段,在水平速度被基本抵消之后进入最终着陆段,最后探测器以垂直姿态软着陆到月面^[1]。

软着陆问题的关键是找到最优飞行轨迹和推力大小与方向的时间历程。其理论基础是庞德里亚金极大值原理,由极大值原理及相应边界条件可将轨道优化问题抽象成两点边值问题,而求解该问题的困难来自于共轭方程组对共轭变量初值选取异常的敏感性。传统的方法主要是打靶法^[2-4],该方法对共轭变量初值依赖性很高,而共轭变量本身没有物理意义,选取准确的初始值很困难。另外一种方法是对推力方向角进行多项式拟合^[5-6],这种方法需要猜测多项式系数的初值,这依然是没有物理意义的变量,也很难给出较为准确的初值。

此外,也有学者运用伪光谱、蚁群算法等方法对该问题进行了求解。王明光等^[7]使用伪光谱方法将软着陆轨道优化问题转换为一个约束参数优化问题,然后采用乘子法处理约束条件,采用变尺度法求解处理后的参数优化问题,此方法具有收敛速度快、对初始控制量不敏感、鲁棒性强的优点。朱建丰等^[8-9]将自适应遗传算法与模拟退火算法相结合,得到一种全局搜索能力和局部搜索能力均较强的自适应模拟退火遗传算法,对月球软着陆轨迹进行优化后,能够搜索到比较精确的全局最优轨迹。

本文在前人工作启发下,应用非线性规划求解月球软着陆最优控制中的两点边值问题^[10],并引入一种共轭变量与控制变量之间的函数变换,用控制变量初值代替共轭变量初值,使迭代初值具有物理意义,便于选取,避免了因共轭变量初值

选取的敏感性而带来的计算困难。

2 系统模型

软着陆转移轨道为 $100 \text{ km} \times 15 \text{ km}$ 的椭圆轨道,从近月点到月面为软着陆全过程。假设月球引力场均匀,忽略月球自转,建立的着陆坐标系如图 1 所示。

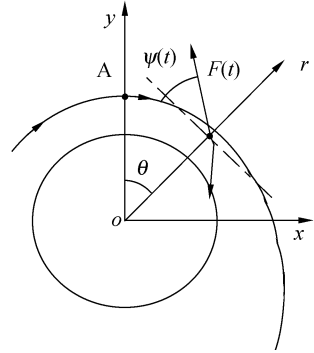


图 1 纵向面软着陆坐标系示意图

Fig. 1 Coordinate of lunar soft landing in longitudinal plane

取月心 o 为坐标原点, oy 指向着陆转移轨道的近月点; $r \in R^+$ 为探测器到月心的距离; θ 是 oy 和 or 的夹角; $\psi(t)$ 为推力方向与 or 垂线的夹角; F 为制动火箭的常值推力大小, F 取 F_{\max} 或 0 。着陆器质心运动方程为:

$$\begin{cases} \dot{r} = v \\ \dot{v} = \frac{F}{m} \sin \psi - \frac{\mu}{r^2} + r\omega^2 \\ \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -\frac{1}{r} \left(\frac{F}{m} \cos \psi + 2v\omega \right) \\ \dot{m} = -\frac{F}{C} \end{cases}, \quad (1)$$

其中, $v \in R$ 是探测器在矢径 r 方向上的速度; $\omega \in R$ 是探测器方位角 θ 的角速度; $m \in R^+$ 是探测器质量; μ 是月球引力常数; C 为制动火箭的排气速度,是一个常值。

假定初始时刻 $t_0 = 0$, 终端时刻 t_f 为任意值。软着陆的初始条件由探测器在椭圆轨道近月点处的状态确定, 即:

$$r(0) = r_0, v(0) = 0, \theta(0) = 0, \omega(0) = \omega_0, m(0) = m_0.$$

为了在到达月面时实现软着陆, 显然有如下终端条件:

$$r(t_f) = r_f, v(t_f) = v_f, \omega(t_f) = 0,$$

其中 $r_0 \in R^+$ 是月心到近月点的距离, $r_f \in R^+$ 是月球半径, $v_f \in R^+$ 为探测器到达月面时的速度。

在数值计算当中由于状态变量的量级相差较大,在轨道积分的过程中会导致有效位数的损失,通常采取归一化处理^[11]来提高计算精度,同时这样处理也可以令优化变量保持在相同的量级。因此,做如下处理,令状态变量:

$$\begin{cases} \bar{r} = r/r_0 \\ \bar{v} = v/\hat{v}, \hat{v} = \sqrt{\mu/r_0} \\ \bar{\theta} = \theta \\ \bar{\omega} = \omega r_0/\hat{v} \\ \bar{m} = m/m_0 \end{cases},$$

及:

$$\begin{cases} \bar{t} = t/\hat{t}, \hat{t} = r_0/\hat{v} \\ \bar{F} = F/\hat{F}, \hat{F} = m_0 \hat{v}^2/r_0 \end{cases},$$

则运动方程(1),可以改写为:

$$\begin{cases} \dot{\bar{r}} = \bar{v} \\ \dot{\bar{v}} = \frac{\bar{F}}{m} \sin \psi - \frac{1}{\bar{r}^2} + \bar{\omega}^2 \\ \dot{\bar{\theta}} = \bar{\omega} \\ \dot{\bar{\omega}} = -\frac{1}{\bar{r}} \left(\frac{\bar{F}}{m} \cos \psi + 2\bar{v}\bar{\omega} \right) \\ \dot{\bar{m}} = -\frac{\bar{F}}{C} \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} \end{cases}, \quad (2)$$

相应的初始条件和终端约束条件改写为:

$$\begin{cases} \bar{r}_0 = 1 \\ \bar{v}_0 = 0 \\ \bar{\theta}_0 = 0 \\ \bar{\omega}_0 = \omega_0 r_0/\hat{v} \\ \bar{m}_0 = 1 \end{cases} \quad \text{及} \quad \begin{cases} \bar{r}_f = r_f/r_0 \\ \bar{v}_f = v_f/\hat{v} \\ \bar{\omega}_0 = 0 \end{cases}.$$

3 耗燃最优控制律设计

将运动方程(1)表示为状态方程的形式:

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, u),$$

其中系统状态变量为 $\bar{x} = [\bar{r}, \bar{v}, \bar{\theta}, \bar{\omega}, \bar{m}]^T$, 控制变量 $u = [\bar{F}, \psi]^T$ 。按照耗燃最优的要求,取终端性能指标为:

$$J = \varphi[\bar{x}(t_f)] = \bar{m}(0) - \bar{m}(t_f) = 1 - \bar{m}(t_f). \quad (3)$$

构造哈密顿函数为:

$$H(\bar{x}, \lambda, u) = \lambda^T f(\bar{x}, u), \quad (4)$$

其中 $\lambda = [\lambda_r, \lambda_v, \lambda_\theta, \lambda_\omega, \lambda_m]^T$, 满足:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H(\bar{x}, \lambda, u)}{\partial x}, \quad (5)$$

即:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_r = -\frac{2\lambda_v}{\bar{r}^3} - \lambda_\omega \bar{\omega}^2 - \frac{\lambda_\omega \bar{F} \cos \psi}{m\bar{r}^2} - \frac{2\lambda_\omega \bar{v}\bar{\omega}}{\bar{r}^2} \\ \dot{\lambda}_v = -\lambda_r + 2\lambda_\omega \frac{\bar{\omega}}{\bar{r}} \\ \dot{\lambda}_\theta = 0 \\ \dot{\lambda}_\omega = -2\lambda_v \bar{r}\bar{\omega} - \lambda_\theta + 2\lambda_\omega \frac{\bar{v}}{\bar{r}} \\ \dot{\lambda}_m = \lambda_v \frac{\bar{F}}{m^2} \sin \psi - \lambda_\omega \frac{\bar{F}}{m^2 \bar{r}} \cos \psi \end{cases}, \quad (6)$$

由上节知,终端约束为:

$$G = \begin{bmatrix} \bar{r}(t_f) - r_f/r_0 \\ \bar{v}(t_f) - v_f/\hat{v} \\ \bar{\omega}(t_f) \end{bmatrix} = 0,$$

则横截条件为:

$$\lambda(t_f) = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial x} \gamma \right]_{t=t_f}, \quad (7)$$

其中 γ 为拉格朗日乘子。

由式(6)、(7)方程可知,沿着最优轨迹,有 $\lambda_\theta \equiv 0$ 。将式(1)代入式(4),并注意到 $\lambda_\theta \equiv 0$, 得到:

$$H = \lambda_r \bar{v} - \lambda_v \frac{\mu}{\bar{r}^2} + \lambda_\omega \bar{r}\bar{\omega}^2 - \lambda_\omega \frac{2\bar{v}\bar{\omega}}{\bar{r}} + \left(\frac{\lambda_v}{m} \sin \psi - \frac{\lambda_\omega}{m\bar{r}} \cos \psi - \frac{\lambda_m}{C} \right) \bar{F}, \quad (8)$$

根据庞特利亚金极大值原理,最优推力为:

$$F^* = \begin{cases} \frac{F_{\max}}{\bar{F}}, \frac{\lambda_v}{m} \sin \psi - \frac{\lambda_\omega}{m\bar{r}} \cos \psi - \frac{\lambda_m}{C} > 0 \\ 0, \frac{\lambda_v}{m} \sin \psi - \frac{\lambda_\omega}{m\bar{r}} \cos \psi - \frac{\lambda_m}{C} < 0 \end{cases}. \quad (9)$$

此外,由于 ψ 不受约束,根据变分法极值条件 $\frac{\partial H}{\partial \psi} = 0$, 可得:

$$\psi^* = -\arctan \left(\frac{\lambda_v \bar{r}}{\lambda_\omega} \right). \quad (10)$$

综上,最优制导律 $u^* = [F^*, \psi^*]^T$ 。

将最优控制律代入状态方程(2)和共轭方程(6),利用初始条件和终端约束对状态方程和共轭方程进行积分,就可得到软着陆最优轨道。此时,求最优轨道就转化成数学上对两点边值问题的求解。

4 非线性规划解两点边值问题

观察式(2)和式(6)可以看出 λ_m 的取值对

$[\lambda_r, \lambda_v, \lambda_\omega]^T$ 以及状态变量 $[\bar{r}, \bar{v}, \bar{\theta}, \bar{\omega}, \bar{m}]^T$ 没有影响, 因而只要先确定 ψ^* , 再选取迭代初值 $[\lambda_r, \lambda_v, \lambda_\omega]_{t=0}^T$, 结合已知的状态变量初值 $\bar{x}(0) = [\bar{r}, \bar{v}, \bar{\theta}, \bar{\omega}, \bar{m}]_{t=0}^T$ 在 $[0, t_f]$ 上对式(2)和式(6)进行积分, 就可以得到末端状态 $\bar{x}(t_f)$, 因此可以将末端状态看作是迭代初值 $[\lambda_r, \lambda_v, \lambda_\omega]_{t=0}^T$ 与末时刻 t_f 的函数。

基于这种考虑, 同样可以把性能指标 J 看作 $[\lambda_r, \lambda_v, \lambda_\omega]_{t=0}^T$ 与 t_f 的函数, 则本文的两点边值问题即转化为:

待优化目标函数: $J = \varphi[x(t_f)]$;

待优化参数: $[\lambda_r, \lambda_v, \lambda_\omega]_{t=0}^T, t_f$;

约束: $\begin{cases} G=0 \\ \text{式(2)、(6)的积分} \end{cases}$

即把两点边值问题转化为一个非线性规划问题, 求解这类问题已经有许多可靠算法。

不过需要说明的是, 在对此非线性规划问题进行数值计算时, $[\lambda_r, \lambda_v, \lambda_\omega]_{t=0}^T$ 将作为迭代初值, 而由于 $[\lambda_r, \lambda_v, \lambda_\omega]_{t=0}^T$ 没有明确的物理意义, 很难选取合理的初值, 而问题本身对初值的选取又有很强的敏感性, 因此, 还有必要引入下面的变换, 使得迭代初值具有明确的物理意义而容易选取^[12]。

由最优控制条件式(10), 不妨设:

$$\lambda_{v0} \bar{r}_0 = \sin(\psi_0), \lambda_{\omega 0} = -\cos(\psi_0),$$

即:

$$\begin{cases} \lambda_{v0} = \frac{1}{r_0} \sin(\psi_0) \\ \lambda_{\omega 0} = -\cos(\psi_0) \end{cases}, \quad (11)$$

同时由式(10)有:

$$\tan \psi = -\frac{\lambda_v \bar{r}}{\lambda_\omega}$$

将上式对 t 求导有:

$$\frac{\dot{\psi}}{\cos^2 \psi} = -\left(\frac{\dot{\lambda}_v \bar{r}}{\lambda_\omega} + \frac{\lambda_v \dot{\bar{r}}}{\lambda_\omega} - \frac{\lambda_v \bar{r} \dot{\lambda}_\omega}{\lambda_\omega^2} \right),$$

将式(2), (6)和(11)代入, 整理后得到:

$$\lambda_r = \frac{\dot{\psi}}{\lambda_{\omega 0} \bar{r}_0} + \frac{2\lambda_{\omega 0} \bar{\omega}_0}{r_0} - \frac{\lambda_{v0} \bar{v}_0}{r_0} + \frac{2\lambda_{v0}^2 \bar{r}_0}{\lambda_{\omega 0}},$$

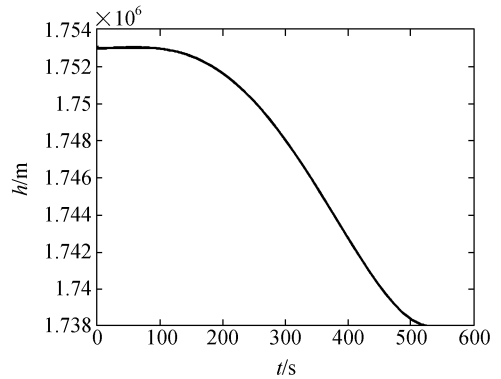
于是有:

$$\lambda_{r0} = \frac{\dot{\psi}_0}{\lambda_{\omega 0} \bar{r}_0} + \frac{2\lambda_{\omega 0} \bar{\omega}_0}{r_0} - \frac{\lambda_{v0} \bar{v}_0}{r_0} + \frac{2\lambda_{v0}^2 \bar{r}_0}{\lambda_{\omega 0}}. \quad (12)$$

这样, 共轭变量初值 $\lambda_{r0}, \lambda_{v0}, \lambda_{\omega 0}$ 就由具有物理意义的 $\psi_0, \dot{\psi}_0$ 代替, 可以按照经验选取合理数值, 同时由于参数个数的减少也减少了运算量。

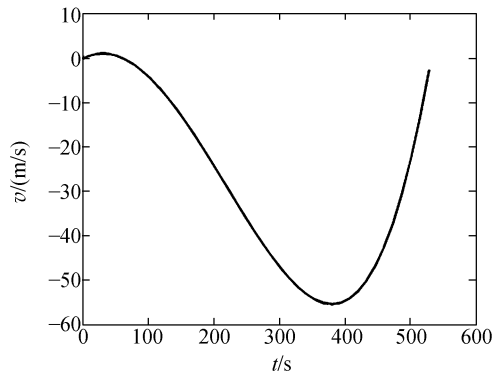
5 仿真及结果

令沿着矢径 r 远离月心方向为正方向, 已知制动发动机比冲 $I = 300 \text{ s}$, 则比例系数 $C = I g_E$,



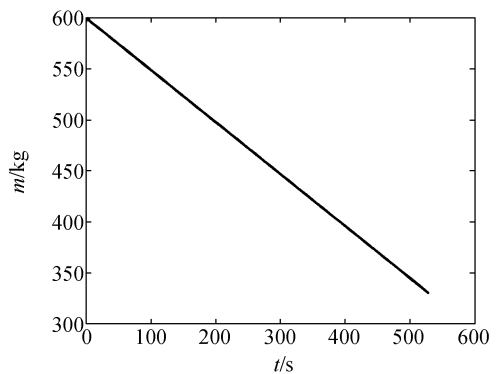
(a) 高度曲线

(a) Height curve



(b) 径向速度曲线

(b) Radial velocity curve



(c) 质量曲线

(c) Mass curve

图 2 最优着陆曲线

Fig. 2 Optimal landing curves

g_E 为地球重力加速度, $F_{\max} = 1\ 500\ \text{N}$ 是发动机最大推力, 月球的引力常数 $\mu = 4.902 \times 10^{12}\ \text{m}^3/\text{s}^2$; 初始时刻探测器在椭圆轨道近月点, 到月心的距离为 $r_0 = 1\ 753\ \text{km}$, 初始角速度 $\omega_0 = 9.65 \times 10^{-4}\ \text{rad/s}$, 初始质量 $m_0 = 600\ \text{kg}$; 着陆时速度 $v_f \leq -3\ \text{m/s}$, 月球半径 $r_f = 1\ 738\ \text{km}$ 。

利用本文方法求解后, 可以得到探测器最终着陆时间为 $t_f = 528.3\ \text{s}$, 探测器最终着陆速度为 $v_f = -2.541\ 5\ \text{m/s}$, 最终消耗燃料 $269.540\ 8\ \text{kg}$, 占探测器总质量的 44.92% 。而在完全相同的初始条件下, 利用传统的打靶法得到的着陆时间和耗燃则分别为 $539.2\ \text{s}$ 和 $275.102\ 0\ \text{kg}$, 本文方法节省了 2.1% 的燃料。图 2 为利用本文方法仿真得出的最优着陆曲线。

参考文献:

- [1] 王大轶, 李铁寿, 马兴瑞. 月球探测器重力转弯软着陆的最优制导[J]. 自动化学报, 2002, 28(3): 385-390.
WANG D Y, LI T SH, MA X R. Optimal guidance for lunar gravity-turn descent[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2002, 28(3): 385-390. (in Chinese)
- [2] 王大轶, 李铁寿, 马兴瑞. 月球最优软着陆两点边值问题的数值解法[J]. 航天控制, 2000(3): 44-49.
WANG D Y, LI T SH, MA X R. Numerical solution of TPBVP in optimal lunar soft landing[J]. *Aerospace Control*, 2000(3): 44-49. (in Chinese)
- [3] 周净扬, 周荻, 段广仁. 月球探测器软着陆最优轨道设计[C]. 第 25 届中国控制会议论文集, 2006: 2226-2229.
ZHOU J Y, ZHOU D, DUAN G R. Optimal orbit design of lunar modules soft landing[C]. *Proceedings of the 25th Chinese Control Conference*, 2006: 2226-2229. (in Chinese)
- [4] 周净扬, 周荻. 月球探测器软着陆精确建模及最优轨道设计[J]. 宇航学报, 2007, 28(6): 1462-1466.
ZHOU J Y, ZHOU D. Precise modeling and optimal orbit design of lunar modules soft landing[J]. *Journal of Astronautics*, 2007, 28(6): 1462-1466.

6 结 论

本文针对月球探测器软着陆的实际问题, 利用 Pontryagin 极大值原理, 基于燃耗最优的原则, 设计了软着陆最优控制律, 将求取最优控制律的问题转化为两点边值问题。在数值计算中, 引入一种函数变换结合非线性规划的方法, 得到了探测器软着陆的最优轨线, 并给出了最终的燃料消耗值。与传统的打靶法比较, 本文方法在一定程度上降低了共轭方程组对共轭变量初值选取的依赖性。计算机数值计算仿真结果说明, 该方法简单、实用并且易于工程实现, 同时在降低耗燃上优于传统的打靶法。此外, 模拟月球表面情况进行试验, 在多种条件下进行半物理仿真研究, 将是本文需要进一步研究的问题。

(in Chinese)

- [5] 王劼, 崔乃刚, 刘瞰, 等. 定常推力登月飞行器最优软着陆轨道研究[J]. 高技术通讯, 2003, 13(4): 39-42.
WANG J, CUI N G, LIU D, *et al.*. Study on soft-landing trajectories of constant-thrust-amplitude lunar probe[J]. *High Technology Letters*, 2003, 13(4): 39-42. (in Chinese)
- [6] 王劼, 李俊峰, 崔乃刚, 等. 登月飞行器软着陆轨道的遗传算法优化[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2003, 43(8): 1056-1059.
WANG J, LI J F, CUI N G, *et al.*. Genetic algorithm optimization of lunar probe soft-landing trajectories[J]. *Journal of Tsinghua University (Science and Technology)*, 2003, 43(8): 1056-1059. (in Chinese)
- [7] 王明光, 裴昕国, 袁建平. 基于伪光谱方法月球软着陆轨道快速优化设计[J]. 中国空间科学技术, 2007, 27(5): 27-32.
WANG M G, PEI T G, YUAN J P. Legendre pseudospectral method for rapid lunar soft-landing trajectory optimization[J]. *Chinese Space Science and Technology*, 2007, 27(5): 27-32. (in Chinese)
- [8] 朱建丰, 徐世杰. 基于自适应模拟退火遗传算法的月球软着陆轨道优化[J]. 航空学报, 2007, 28(4):

806-812.

ZHU J F, XU SH J. Optimization of lunar soft landing trajectory based on adaptive simulated annealing genetic algorithm[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2007,28(4):806-812. (in Chinese)

- [9] 段佳佳, 徐世杰, 朱建丰. 基于蚁群算法的月球软着陆轨迹优化[J]. 宇航学报, 2008, 29(2): 476-481.

DUAN J J, XU SH J, ZHU J F. Optimization of lunar soft landing trajectory based on ant colony algorithm[J]. *Journal of Astronautics*, 2008, 29(2): 476-481. (in Chinese)

- [10] 梁新刚, 杨涤. 应用非线性规划求解异面最优轨道转移问题[J]. 宇航学报, 2006, 27(3): 363-368.

LIANG X G, YANG D. Applying nonlinear programming to solve nonplanar optimal orbital transfer problem[J]. *Journal of Astronautics*, 2006, 27(3): 363-368. (in Chinese)

- [11] TROY G, JASON C H, JOHN H. Optimal finite thrust orbit transfers with large numbers of burns [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1999, 22(1): 139-148.

- [12] 王明春, 荆武兴, 杨涤, 等. 能量最省有限推力同平面轨道转移[J]. 宇航学报, 1992(3): 24-31.

WANG M CH, JING W X, YANG D, et al. . Minimum fuel orbit coplanar transfers with finite thrust [J]. *Journal of Astronautics*, 1992(3): 24-31. (in Chinese)

作者简介:



单永正(1978—),男,黑龙江哈尔滨人,博士研究生,主要从事最优控制在航天领域中应用的研究。E-mail: supersyz@163.com



吕世良(1974—),男,山东郓城人,助理研究员,主要从事伺服控制和空间遥感成像方面的研究。E-mail: lvshiliang100@sina.com



段广仁(1962—),男,黑龙江人,教授,博士生导师,主要从事鲁棒控制理论、广义系统理论和现代控制理论在航天领域中的应用方面的研究。E-mail: g. r. duan@hit. edu. cn